# Higher equations of motion in $\mathbf{N=1}$ SUSY Liouville field theory
# Высшие уравнения движения в $\mathbf{N=1}$ SUSY теории Лиувилля

A. A. Belavin[a], Al. B. Zamolodchikov[b,c]

[a] *Институт Теоретической Физики им. Л.Д.Ландау, РАН, Москва 117940*

[b] *Laboratoire de Physique Théorique et Astroparticules, Université Montpellier II, Pl. E. Bataillon, 34095 Montpellier, France*

[c] *Институт Теоретической и Экспериментальной Физики, Б.Черёмушкинская 25, Москва 117259*

5 июня 2007 г.

**Аннотация**

Similarly to the ordinary bosonic Liouville field theory, in its $N = 1$ supersymmetric version an infinite set of operator valued relations, the "higher equations of motions", hold. Equations are in one to one correspondence with the singular representations of the super Virasoro algebra and enumerated by a couple of natural numbers $(m, n)$. We demonstrate explicitly these equations in the classical case, where the equations of type $(1, n)$ survive and can be interpreted directly as relations for classical fields. The general form of higher equations of motion is established in the quantum case, both for the Neveu-Schwarz and Ramond series.

Как и в бозонной теории поля Лиувилля, в $N = 1$ суперсимметричной версии этой теории выполняется бесконечное число операторных соотношений, так называемых "высших уравнений движения". Эти уравнения находятся во взаимно-однозначном соответствии с вырожденными представлениями суперсимметричной алгебры Вирасоро, т.е., перечисляются парами натуральных чисел $(m, n)$. В работе явно продемонстрированы эти уравнения в классическом пределе, где только серия $(1, n)$ выживает и может быть интерпретирована непосредственно как набор соотношений для классических полей. Для квантового случая установлена общая форма этих соотношений, соответствующих как представлениям Невё-Шварца, так и представлениям Рамона.

**1. Мотивировки.** В работе [1] было показано, что в теории поля Лиувилля (ТПЛ) выполняется бесконечный набор соотношений для квантовых операторов. Соотношения нумеруются парой положительных целых чисел $(m, n)$ и носят условное название "высших уравнений движения" (ВУД), связанное с тем, что первое из них, отвечающее паре $(1, 1)$, совпадает с обычным уравнением движения (уравнением Лиувилля). Они связывают между собой различные первичные поля $V_a(x)$ (операторы $V_a$ можно представлять себе как регуляризованные экспоненты $\exp(2a\phi)$ от фундаметального Лиувиллиевского поля $\phi$). Эти уравнения "выводятся" на основании двух допущений. Первое – это равенство нулю всех сингулярных векторов в вырожденных представлениях, построенных на подходящих экспоненциальных полях (т.е., так называемое "отщепление нулевых векторов"). Это предположение – естественное продолжение на квантовый случай легко проверяемых соотношений в классической ТПЛ. Кроме того, это – необходимое следствие, накладываемое на ТЛП условием унитарности. Второе предположение обосновано гораздо меньше.

Оно заключается в утверждении, что набор экспоненциальных полей $\{V_a\}$ (где резрешены также комплексные значения параметра $a$) в каком-то смысле исчерпывает всё множество первичных полей в ТПЛ. Одна из проблем здесь – пространство локальных полей и его полнота. В ТПЛ, в отличие от более изученных рациональных конформных теорий [2], обычное соответствие между состояниями и операторами не выполняется буквально, что затрудняет непосредственное перенесение полноты с унитарного пространства физических состояний. Из-за этой концептуальной проблемы статус второго допущения неясен. Мы здесь отметим только следующую формулировку второго допущения: пространство локальных первичных полей, независимо от норм и полноты, натягивается на подходящее подмножество множества $\{V_a\}$.

Высшие уравнения оказываются полезными в практических применениях. В частности, в [3] они использовались для вывода общей четырехточечной корреляционной функции в минимальной Лиувиллиевкой гравитации (используемая здесь терминология введена в работе [4]) с одним вырожденным полем материи. Весьма правдоподобно, что ВУД окажутся необходимыми для более общей программы явного построения всех корреляционных функций в минимальной гравитации.

Цель этой статьи – найти аналогичное семейство высший уравнений в суперсимметричной версии теории поля Лиувилля (СТПЛ). Известно, что $N = 1$ SUSY версия ТПЛ [5] – ближайший партнёр бозонной теории и имеет схожие свойства. В частности, естественно ожидать существование суперсимметричной версии ВУД.

**2. Высшие уравнения в классической СТПЛ.** Мы начнём с классических уравнений движения $N = 1$ СТПЛ [6, 7]

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\psi_{\rm c} = -iM\bar{\psi}_{\rm c}e^{\varphi}\ ;\quad \partial\bar{\psi}_{\rm c} = iM\psi_{\rm c}e^{\varphi}\ ; \\ \partial\bar{\partial}\varphi = iM\psi_{\rm c}\bar{\psi}_{\rm c}e^{\varphi} + M^2e^{2\varphi}\ , \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varphi$ это бозонная, а $(\psi_{\rm c}, \bar{\psi}_{\rm c})$ – фермионная компоненты[1] фундаментального поля. Как и в [1] мы используем комплексные координаты ($\partial = \partial_z$ и $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$) и вводим для наглядности избыточный параметр $M$. Уравнения (1) получаются как условия экстремума для следующей классической плотности Лагранжиана

$$\begin{aligned} S_{\rm cl} = \frac{1}{2}\big(\partial\varphi\bar{\partial}\varphi + \psi_{\rm c}\bar{\partial}\psi_{\rm c} + \bar{\psi}_{\rm c}\partial\bar{\psi}_{\rm c} + 2iM\psi_{\rm c}\bar{\psi}_{\rm c}e^{\varphi} \\ + M^2e^{2\varphi}\big)\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Классическая (а также квантовая) СТПЛ были рассмотрены в [6–8] вскоре после её появления в теории струн [5]. Здесь мы напомним только те свойства, которые нам понадобятся в дальнейшем.

На классическом уровне суперконформная инвариантность эквивалентна утверждению, что правая (соответственно левая) компонента классического супертока

$$S_{\rm c} = -i\psi_{\rm c}\partial\varphi + i\partial\psi_{\rm c}\ ;\quad \bar{S}_{\rm c} = -i\bar{\psi}_{\rm c}\bar{\partial}\varphi + i\bar{\partial}\bar{\psi}_{\rm c} \tag{3}$$

является голоморфной $\bar{\partial}S^{(\rm c)} = 0$ (антиголоморфной $\partial\bar{S}^{(\rm c)} = 0$). Эти соотношения, так же как и аналогичные утверждения $\bar{\partial}T^{(\rm c)} = \partial\bar{T}^{(\rm c)} = 0$ для компонент тензора энергии-импульса

$$\begin{aligned} T_{\rm c} = -\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}\partial^2\varphi - \frac{1}{2}\psi_{\rm c}\partial\psi_{\rm c} \\ \bar{T}_{\rm c} = -\frac{1}{2}(\bar{\partial}\varphi)^2 + \frac{1}{2}\bar{\partial}^2\varphi - \frac{1}{2}\psi_{\rm c}\bar{\partial}\psi_{\rm c} \end{aligned} \tag{4}$$

[1] поля $\psi_{\rm c}$, а также классический суперток $S_{\rm c}$ и тензор энергии-импульса $T_{\rm c}$, снабжены значком, чтобы отличить их от иначе нормированных квантовых полей в последующих разделах

легко проверяются как следствия уравнений (1). Для полного описания суперсимметрии нам понадобятся ещё классические генераторы $G$ и $\bar{G}$, правый и левый суперзаряды. Эти операторы действуют на классические поля и удовлетворяют стандартным соотношениям

$$G^2 = \partial \; ; \; \bar{G}^2 = \partial \; ; \; \{G, \bar{G}\} = 0 \; . \tag{5}$$

Их действие на фундаментальные компоненты $\varphi$ и $(\psi_{\mathrm{c}}, \bar{\psi}_{\mathrm{c}})$ следующее

$$G\varphi = i\psi_{\mathrm{c}} \; ; \quad \bar{G}\varphi = i\bar{\psi}_{\mathrm{c}} \; . \tag{6}$$

Из этих соотношений и алгебры (5) вытекает такая формула для действия суперзарядов на общее экспоненциальное поле

$$Ge^{\sigma\varphi} = i\sigma\psi_{\mathrm{c}}e^{\varphi} \; ; \quad \bar{G}e^{\sigma\varphi} = i\sigma\bar{\psi}_{\mathrm{c}}e^{\varphi} \; . \tag{7}$$

Все три уравнения (1) вытекают из соотношения

$$G\bar{G}\varphi = iMe^{\varphi} \tag{8}$$

и алгебры (5). Из этого, после некоторых вычислений, получаем

$$G\bar{G}e^{\sigma\varphi} = iM\sigma e^{(1+\sigma)\varphi} - \sigma^2\psi_{\mathrm{c}}\bar{\psi}_{\mathrm{c}}e^{\sigma\varphi} \; , \tag{9}$$

соотношение, полезное в дальнейшем.

Классические $D$-операторы образуют бесконечную последовательность $D^{(\mathrm{c})}_{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Приведём явно несколько первых представителей

$$\begin{aligned} D^{(\mathrm{c})}_1 &= G \\ D^{(\mathrm{c})}_3 &= G\partial + S_{\mathrm{c}} \\ D^{(\mathrm{c})}_5 &= G\partial^2 + 2T_{\mathrm{c}}G + 3S_{\mathrm{c}}\partial + 2\partial S_{\mathrm{c}} \\ D^{(\mathrm{c})}_7 &= G\partial^3 + 8T_{\mathrm{c}}G\partial + 4\partial T_{\mathrm{c}} \\ &\quad + 18T_{\mathrm{c}}S_{\mathrm{c}} + 6S_{\mathrm{c}}\partial^2 + 8\partial S_{\mathrm{c}}\partial + 3\partial^2 S_{\mathrm{c}} \\ &\quad \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

Имеется, конечно, точно такая же последовательность “левых” операторов $\bar{D}^{(\mathrm{c})}_{2k-1}$. Пользуясь одними только определениями супертока (3), тензора энергии-импульса (4) и алгеброй SUSY (5), можно проверить тождества

$$D^{(\mathrm{c})}_{2k-1}e^{-(k-1)\varphi} = \bar{D}^{(\mathrm{c})}_{2k-1}e^{-(k-1)\varphi} = 0 \tag{11}$$

Прямое вычисление с использованием уравнений движения (1) дает

$$\begin{aligned} \bar{D}^{(\mathrm{c})}_1 D^{(\mathrm{c})}_1 \varphi &= -iMe^{\varphi} \\ \bar{D}^{(\mathrm{c})}_3 D^{(\mathrm{c})}_3 \varphi e^{-\varphi} &= iM^3 e^{2\varphi} \\ \bar{D}^{(\mathrm{c})}_5 D^{(\mathrm{c})}_5 \varphi e^{-2\varphi} &= -4iM^5 e^{3\varphi} \\ \bar{D}^{(\mathrm{c})}_7 D^{(\mathrm{c})}_7 \varphi e^{-3\varphi} &= 36iM^7 e^{4\varphi} \end{aligned} \tag{12}$$

Это позволяет предположить, что для всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\bar{D}^{(\mathrm{c})}_{2k-1} D^{(\mathrm{c})}_{2k-1} \varphi e^{(1-k)\varphi} = i(-)^k [(k-1)!]^2 M^{2k-1} e^{k\varphi} \tag{13}$$

В следующих разделах мы покажем, что эти уравнения есть классический предел (некоторого подмножества) более общих соотношений, ВУД квантовой СТПЛ.

**3. Квантовая СТПЛ.** Здесь мы напомним очень кратко основные черты квантовой СТПЛ (см. [9–11]). Теория определяется плотностью Лагранжиана[2]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{SLFT}} = \frac{1}{8\pi}\left(\partial_a\phi\right)^2 + \frac{1}{2\pi}\left(\psi\bar{\partial}\psi + \bar{\psi}\partial\bar{\psi}\right) \\ + 2i\mu b^2\bar{\psi}\psi e^{b\phi} + 2\pi b^2\mu^2 e^{2b\phi}\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $\mu$ – размерная константа связи, условно называемая космологической постоянной, а $b$ – квантовый параметр, причем классический предел достигается при $b \to 0$. Комбинация

$$Q = b^{-1} + b \tag{15}$$

по традиции называется фоновым зарядом. В форме (14) действие явно суперсимметрично, причём классическое действие (2) получается как непосредственный предел $b \to 0$ с $b\phi \to \varphi$, $b\psi \to \psi_{\mathrm{c}}$, $2\pi\mu b^2 \to M$ и

$$\int \mathcal{L}_{\mathrm{SLFT}} d^2x \to \frac{1}{2\pi b^2} S_{\mathrm{cl}} \tag{16}$$

Для интерпретации как "возмущенной суперконформной теории", последние два члена в (14) лучше понимать как поле

$$-G\bar{G}e^{b\phi} = b^2\psi\bar{\psi}e^{b\phi} - 2i\pi\mu b^2 e^{2b\phi}\ , \tag{17}$$

"топ" компоненту соответствующе супермультиплета.

СТПЛ является суперконформной квантовой теорией поля, причем симметрия генерируется голоморфной и антиголоморфной компонентами супертока

$$\begin{aligned}S(z) &= -i\phi\partial\psi + iQ\partial\psi \\ \bar{S}(\bar{z}) &= -i\phi\bar{\partial}\bar{\psi} + iQ\partial\bar{\psi}\end{aligned} \tag{18}$$

В классическом пределе они, очевидно, превращаются в поля (3) следующим образом $S \to b^{-2}S_{\mathrm{c}}$, $\bar{S} \to b^{-2}\bar{S}_{\mathrm{c}}$. Точно так же $T \to b^{-2}T_{\mathrm{c}}$, $\bar{T} \to b^{-2}\bar{T}_{\mathrm{c}}$ правая и левая компонеты классического тензора энергии-импульса (4) есть пределы квантовых полей

$$\begin{aligned}T(z) &= -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{Q}{2}\partial^2\phi - \frac{1}{2}\psi\partial\psi \\ \bar{T}(\bar{z}) &= -\frac{1}{2}(\bar{\partial}\phi)^2 + \frac{Q}{2}\bar{\partial}^2\phi - \frac{1}{2}\psi\bar{\partial}\psi\end{aligned} \tag{19}$$

Вместе с супертоком (18) они образуют суперконформную алгебру относительно операторных разложений

$$\begin{aligned}S(z)S(z') &= \frac{\widehat{c}}{(z-z')^3} + \frac{T(z')}{z-z'} + \mathrm{reg.} \\ T(z)S(z') &= \frac{3S(z')}{2(z-z')^2} + \frac{\partial S(z')}{z-z'} + \mathrm{reg.} \\ T(z)T(z') &= \frac{3\widehat{c}}{4(z-z')^4} + \frac{2T(z')}{(z-z')^2} + \frac{\partial T(z')}{z-z'} + \mathrm{reg.}\end{aligned} \tag{20}$$

где центральный заряд связан с $b$ следующим образом

$$\widehat{c} = 1 + 2Q^2 \tag{21}$$

[2] В этой статье мы последовательно пользуемся компонентной формой суперсимметричных выражений, систематически избегая суперпространственных обозначений. В нашем случае суперполя не дают существенной экономии, ни в обозначениях, ни в вычислениях.

Лорановские компоненты

$$T(z)=\sum_n L_n z^{-n-3/2} \tag{22}$$
$$S(z)=\sum_k G_k z^{-k-3/2}$$

(индекс $k\in Z+1/2$ в представлениях типа Невё-Шварца (NS) и $k\in Z$ в представлениях типа Рамона (R)) дают стандартную форму алгебры супер-Вирасоро ($SV$)

$$\begin{aligned}
\{G_k,G_l\}&=2L_{k+l}+\frac{\widehat{c}}{2}\left(k^2-\frac{1}{4}\right)\delta_{k+l}\\
[L_n,G_k]&=\left(\frac{n}{2}-k\right)G_{n+k}\\
[L_m,L_n]&=(m-n)L_{m+n}+\frac{\widehat{c}}{8}(m^3-m)\delta_{m+n}
\end{aligned} \tag{23}$$

Локальнае поля образуют представления старшего веса правой и левой алгебр $SV\otimes\overline{SV}$, оба либо типа NS, либо R. Соответствующие старшие векторы представляют собой первичные суперконформные поля, которые мы обозначаем $V_a$ для NS-представлений и $R_a^{\pm}$ для R-представлений. Их размерности следующим образом зависят от параметра $a$

$$\Delta_{\mathrm{NS}}(a)=\frac{a(Q-a)}{2} \tag{24}$$
$$\Delta_{\mathrm{R}}(a)=\frac{a(Q-a)}{2}+\frac{1}{16}\ ,$$

по разному для NS и R секторов. Полезно сравнивать основные поля Лиувилля $\phi$ и $(\psi,\bar{\psi})$ со свободными безмассовыми бозоном и Майорановским фермионом. В таком сравнении при $\operatorname{Re}a<Q/2$ первичное поле $V_a$ соответствует нормально упорядоченной экспоненте $:\exp(a\phi):$. Часто вместо $a$ используется другой параметр $\lambda=Q/2-a$ Соответственно

$$\Delta_{\mathrm{NS}}(a)=\frac{\widehat{c}-1}{16}-\frac{\lambda^2}{2} \tag{25}$$
$$\Delta_{\mathrm{R}}(a)=\frac{\widehat{c}}{8}-\frac{\lambda^2}{2}$$

Во втором, Рамоновском случае, имеется два одинаково пригодных вектора старшего веса $R_a^{\pm}$. Они образуют двумерное представление

$$G_0\binom{R_a^+}{R_a^-}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{(-1+i)\lambda}{2}\\ \dfrac{(1+i)\lambda}{2} & 0\end{pmatrix}\binom{R_a^+}{R_a^-} \tag{26}$$
$$\bar{G}_0\binom{R_a^+}{R_a^-}=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{(1+i)\lambda}{2}\\ \dfrac{(-1+i)\lambda}{2} & 0\end{pmatrix}\binom{R_a^+}{R_a^-}$$

Картановской подалгебры $G_0^2=\bar{G}_0^2=L_0-\widehat{c}/16$ и $\{G_0,\bar{G}_0\}=0$. На языке свободных полей $R_a^+$ и $R_a^-$ можно сопоставить соответственно выражениям $\sigma:\exp(a\phi):$ и $\mu:\exp(a\phi):$, где $\sigma$ и $\mu$ – стандартные поля порядка и беспорядка для свободного фермиона, знакомые по модели Изинга [12]. Эти два поля полулокальны по отношению друг к другу, с индексом взаимной локальности $-1$. В дальнейших рассуждениях это удвоение Рамоновских первичных полей не играет особой роли и мы часто будем опускать индекс $\pm$ у поля $R_a^{\pm}$ (держа, однако, в голове это свойство).

**4. Вырожденные первичные поля.** При определенных специальных значениях параметра $a$ представления алгебры $SV$ сингулярны. Это происходит при [13] $a = a_{m,n}$ (или, эквивалентно, при $a = Q - a_{m,n}$)

$$a_{m,n} = -\lambda_{m-1,n-1} \tag{27}$$

где $(m, n)$ есть пара положительных целых чисел, и мы ввели удобное обозначение

$$\lambda_{m,n} = (mb^{-1} + nb)/2 \tag{28}$$

В случае общего положения при $a = a_{m,n}$ появляется один особый вектор на уровне $mn/2$ в модуле Верма, либо над $V_{a_{m,n}} = V_{m,n}$ (при $m - n \in 2Z$), либо над $R_{a_{m,n}} = R_{m,n}$ ($m - n \in 2Z + 1$). Удобно для каждой пары $(m, n)$ определить "оператор рождения особого вектора" $D_{m,n}$, представляющий собой градуированный многочлен по $G_{-k}$ и $L_{-k}$ уровня $mn/2$ с коэффициентами, зависящими от параметра $b$, такой, что особый вектор возникает при действии $D_{m,n}$ на $V_{m,n}$ или $R_{m,n}$, в зависимости от четности $m - n$. В случае представления NS нормировка оператора однозначно фиксируется коэффициентом при члене старшего порядка

$$D_{m,n} = G_{-1/2}^{mn} + \ldots \qquad \text{(NS)} \tag{29}$$

Очевидно, что фермионная четность этого оператора совпадает с чётностью произведения $mn$. В Рамоновском случае $mn$ всегда чётно, а наличие генератора $G_0$ всегда дает возможность сделать $D_{m,n}$ бозонным. Кроме того, мы условимся ставить все фермионные операторы $G_{-n}$ справа от бозонных $L_{-n}$, а между собой упорядочивать их по возрастанию индекса $-n$. Тогда однозначная нормировка

$$D_{m,n} = L_{-1}^{mn/2} + \ldots \qquad \text{(R)} \tag{30}$$

предписывается коэффициентом при $L_{-1}^{mn/2}$ и определенным способом упорядочения операторов в остальных членах. Мы условимся Для умеренных $(m, n)$ полином $D_{m,n}$ можно вычислить вручную. Приведем несколько простейших примеров.

- Уровень 1/2: Особый модуль возникает над $V_{1,1} = V_0$, а особый вектор создается оператором

$$D_{1,1} = G_{-1/2} \tag{31}$$

- Уровень 1: Особый вектор в модуле над $R_{1,2}$ с

$$D_{1,2} = L_{-1} - \frac{2b^2}{1 + 2b^2} G_{-1} G_0 \tag{32}$$

  появляется при $a = a_{1,2} = -b/2$. Имеется аналогичный особый модуль над $R_{2,1}$. Однако не обязательно выписывать отдельно $D_{2,1}$, так как он получается из $D_{1,2}$ по симметрии $m \leftrightarrow n$, $b \to b^{-1}$. В дальнейшем мы будем систематически опускать такие "зеркальные образы" без специальных оговорок.

- Уровень 3/2: Здесь есть сингулярный вектор в модуле типа NS над $V_{1,3}$ с

$$D_{1,3} = L_{-1} G_{-1/2} + b^2 G_{-3/2} \tag{33}$$

- Уровень 2: Особое представление над $R_{1,4}$ с оператором рождения

$$\begin{aligned} D_{1,4} = L_{-1}^2 &+ \frac{3b^2}{2} L_{-2} \\ &+ \frac{b^2(1 - 6b^2)}{1 + 4b^2} G_{-2} G_0 - \frac{4b^2}{1 + 4b^2} L_{-1} G_{-1} G_0 \ , \end{aligned} \tag{34}$$

а также другое вырожденное представление типа NS в $[V_{2,2}]$, где

$$D_{2,2} = L_{-1}^2 + \frac{(1+b^2)^2}{2b^2} L_{-2} - G_{-3/2}G_{-1/2} \tag{35}$$

- Уровень 5/2. Вырожденное NS поле $V_{1,5}$ с

$$\begin{aligned} D_{1,5} = L_{-1}^2 G_{-1/2} + 2b^2(1+3b^2)G_{-5/2} \\ + 3b^2 G_{-3/2}L_{-1} + 2b^2 L_{-2}G_{-1/2} \end{aligned} \tag{36}$$

Дальнейшие выражения довольно громоздки и мы их здесь не приводим, хотя в дальнейшем мы используем $D_{m,n}$ в явной форме вплоть до уровня 9/2. Разумеется, те же выражения с $G_n \to \bar{G}_n$ и $L_n \to \bar{L}_n$ дают "левые" операторы рождения $\bar{D}_{m,n}$.

В СТПЛ, как и в бозонной ТПЛ, все особые векторы "отщепляются", т.е., в смысле квантовых операторов

$$D_{m,n}(V,R)_{m,n} = \bar{D}_{m,n}(V,R)_{m,n} = 0 \tag{37}$$

где в качестве первичного поля стоит или NS поле, или поле Рамона, в очевидной зависимости от четности чисел $m$ и $n$. Это – квантовая версия классических соотношений (11). В точности как и в бозонном случае, уравнения (37) на особые векторы можно рассматривать как основной динамический принцип СТПЛ. Так, и самые первые шаги в изучении СТПЛ [6–8], и последние достижения в построении полной теории [10, 11], основаны на этом "отщеплении".

В следующем разделе мы установим некоторое алгебраическое соотношение для $D_{m,n}$, являющееся суперсимметричным обобщением "формулы произведения", найденной в [1] для "норм логарифмических вырожденных полей" (ниже см. более точное определение).

**5. Нормы логарифмических вырожденных полей.** Каждому $D_{m,n}$ из предыдущего раздела сопоставим "сопряженный" оператор $D_{m,n}^\dagger$ по правилам $G_n^\dagger = G_{-n}$ и $L_n^\dagger = L_{-n}$. Тогда $D_{m,n}^\dagger D_{m,n}$ очевидно действует на уровнях инвариантно. В частности для вектора старшего веса $|a\rangle$ (здесь мы используем обозначение, общее для первичных полей типа NS и R) размерности $\Delta = \Delta_{\mathrm{NS}}(a)$ или $\Delta = \Delta_{\mathrm{R}}(a)$, в зависимости от типа представления,

$$D_{m,n}^\dagger D_{m,n}\,|a\rangle = d_{m,n}(a,b)\,|\Delta\rangle \tag{38}$$

с некоторым рациональным собственным значением $d_{m,n}(a,b)$. По определению, это значение обращается в нуль при $a = a_{m,n}$ (и при $a = Q - a_{m,n}$), в точках, где $\Delta_a$ дает размерности Каца [13] для вырожденных представлений. Нас интересует величина $r_{m,n}$, коэффициент при линейном члене

$$d_{m,n}(a,b) = r_{m,n}(a - a_{m,n}) + O\left((a-a_{m,n})^2\right) \tag{39}$$

Этот коэффициент является функцией $b$. Вычисления "вручную" с использованием явных формул (31–36) (и далее, вплоть до уровня 9/2), приводят к следующим компактным результатам

$$
\begin{aligned}
r_{1,1} &= b^{-1}(1+b)^2 \\
r_{1,2} &= b^{-1}(1-b^4) \\
r_{1,3} &= -b^{-1}(1-b^4)(1+3b^2) \\
r_{1,4} &= -2b^{-1}(1-b^4)(1-9b^4) \\
r_{2,2} &= b^{-5}(1-b^4)^2(1+b^2) \\
r_{1,5} &= 4b^{-1}(1-b^4)(1-9b^4)(1+5b^2) \\
r_{1,6} &= 12b^{-1}(1-b^4)(1-9b^4)(1-25b^4) \\
r_{2,3} &= b^{-7}(1-b^4)^3(1-9b^4) \\
r_{1,7} &= -36b^{-1}(1-b^4)(1-9b^4)(1-25b^4)(1+7b^2) \\
r_{1,8} &= -144b^{-1}(1-b^4)(1-9b^4)(1-25b^4)(1-49b^4) \\
r_{2,4} &= -2b^{-9}(1-b^4)^3(1-9b^4)^2(1+2b^2) \\
r_{1,9} &= 579b^{-1}(1-b^4)(1-9b^4)(1-25b^4)(1-49b^4) \\
&\quad \times (1+9b^2) \\
r_{3,3} &= -3b^{-13}(1-b^4)^4(1+b^2)(9-b^4)(1-9b^2)
\end{aligned} \tag{40}
$$

Все они единым образом описываются такой “формулой произведений”

$$
r_{m,n} = 2^{1-mn} \prod_{(k,l)\in[m,n]} (kb + lb^{-1}) \ , \tag{41}
$$

где символ $[m,n]$ обозначает либо $[m,n]_{\mathrm{NS}}$, либо $[m,n]_{\mathrm{R}}$, в зависимости от типа представления. Здесь

$$
\begin{aligned}
[m,n]_{\mathrm{NS}} = \{&1-n:2:n-1, 1-m:2:m-1\} \\
&\cup \{2-n:2:n, 2-m:2:m\} \setminus \{0,0\}
\end{aligned} \tag{42}
$$

и

$$
\begin{aligned}
[m,n]_{\mathrm{R}} = \{&1-n:2:n-1, 2-m:2:m\} \\
&\cup \{2-n:2:n, 1-m:2:m-1\} \setminus \{0,0\}
\end{aligned} \tag{43}
$$

В этих выражениях мы использовали обозначение $a:d:b$ (от $a$ до $b$ с шагом $d$) для “линейного” множества, т.е., множества чисел $a, a+d, a+2d, \ldots, b$, $\{A,B\}$ для множества пар $(k,l)$ с $k$ и $l$ пробегающими независимо множества $A$ и $B$, $\{A_1,B_1\} \cup \{A_2,M_2\}$ для стандартного объединения множеств. Наконец, $\ldots \setminus \{0,0\}$ означает, что пара $(0,0)$ исключена из множества.

Выражение (41) очень похоже на то, которое было получено в работе [1] для аналогичной величины, относящейся к сингулярным представлениям обычной алгебры Вирасоро. В том случае был предложен “физический” вывод этого соотношения, основанный на согласованности ВУД с одноточечными функциями ТПЛ в так называемой “геометрии диска Пуанкаре” (см. работу [14]). В то же время ясно, что формула носит чисто алгебраический характер и не имеет никакого отношения ни к ВУД, ни к диску Пуанкаре. Весьма желательно поэтому получить вывод этого соотношения, а также его суперсимметричного варианта (41), чисто алгебраическими средствами. Очень вероятно, что такой вывод можно получить изучая структуру вложений модулей в нетривиальном случае рациональных значений $b^2$ (Авторы благодарят Б.Фейгина за обсуждение этого вопроса). Отметим алгебраический, хотя и довольно сложный вывод частного случая формулы произведений, для особых представлених $(1,n)$ алгебры Вирасоро [16].

В этой короткой заметке мы пойдём по упрощенному пути, противоположному принятому в [1]. Не имея пока прямого доказательства, мы примем предложение (41) как данное и выведем коэффициенты в ВУД на основе его сравнения с одноточечными функциями СТПЛ на диске Пуанкаре [17, 18]. Это, в отличие от анализа, основанного на многоточечных функциях (см. [1]), делает вывод очень коротким и позволяет избежать утомительных вычислений, связанных со структурными константами СТПЛ.

**6. Логарифмические вырожденные поля и ВУД.** Наконец, мы готовы определить, в том же духе, что и в [1], бесконечное семейство "логарифмических вырожденных полех" $V'_{m,n}$ $(m-n \in 2Z)$ и $R_{m,n}$ $(m-n \in 2Z+1)$. Вводя логарифмические поля общего положения $V'_a = \partial V_a/\partial a$ и $R'_a = \partial R_a/\partial a$ через производные по параметру $a$ (в пределе свободных полей $\phi \to -\infty$ они выглядят как нормально-упорядоченные произведения $:\phi \exp(a\phi):$ или $\sigma(\mu):\phi\exp(a\phi):$), положим

$$\begin{aligned} V'_{m,n} &= V'_{a_{m,n}} \qquad m-n \in 2Z \\ R'_{m,n} &= R'_{a_{m,n}} \qquad m-n \in 2Z+1 \end{aligned} \tag{44}$$

В то время как поля $V'_{m,n}$ и $R'_{m,n}$ – логарифмические (так же как и общие $V'_a$ и $R'_a$), выполняется следующее

*Предложение:*

$$\begin{aligned} &\bar{D}_{m,n} D_{m,n} V'_{m,n} \quad \text{at} \qquad m-n \in 2Z \\ &\bar{D}_{m,n} D_{m,n} R'_{m,n} \quad \text{at} \qquad m-n \in 2Z+1 \end{aligned} \tag{45}$$

– первичные поля.

Здесь мы не будем повторять доказательство этого утверждения, так как оно буквально повторяет рассуждения работы [1]. Так же как и в случае Лиувилля, в СТПЛ эти поля следует отождествить с другими полями экспоненциального типа, обсуждавшимися в разделе 3. Сравнивая размерности, находим

$$\begin{aligned} \bar{D}_{m,n} D_{m,n} V'_{m,n} &= B_{m,n} \tilde{V}_{m,n} \\ \bar{D}_{m,n} D_{m,n} R'_{m,n} &= B_{m,n} \tilde{R}_{m,n} \end{aligned} \tag{46}$$

где $\tilde{V}_{m,n} = V_{a_{m,-n}}$ и $\tilde{R}_{m,n} = R_{a_{m,-n}}$ имеют размерности $\Delta^{(\mathrm{NS})}_{m,n} + mn/2$ и $\Delta^{(\mathrm{R})}_{m,n} + mn/2$ соответственно.

Уравнения (46) – это, наконец, наши долгожданные суперсимметричные ВУД. Остается задача о явном определении численных коэффициентов $B_{m,n}$. Она обсуждается в следующем разделе. Их можно найти сравнивая правую и левую части (46) внутри корреляционных функций. Простейшая такая функция – это одноточечные функции на диске Пуанкаре [14]. В этой геометрии, в отличие от случая сферы или "конечного диска" [15], калибровочная группа $SL(2,R)$ действует как изометрия и, следовательно, нет проблемы факторизации её орбит. Есть все основания ожидать выполнения всех операторных соотношений уже на одноточечном уровне. С другой стороны, такие одноточечные функции имеют в СТПЛ относительно простой вид [17, 18]. Мы рассмотрим их в следующем разделе.

**7. Одноточечные функции на диске Пуанкаре.** В работах [17, 18] построены одноточечные функции первичных полей в СТПЛ с граничными условиями, отвечающими так называемой геометрии диска Пуанкаре. Грубо говоря, эта геометрия представляет собой квантовую версию следующего "базисного" решения классических суперсимметричных уравнений Лиувилля (1) в единичном диске $|z| < 1$

$$\begin{aligned} e^{\varphi} &= \frac{2}{M^2(1-z\bar{z})^2} \\ \psi &= \bar{\psi} = 0 \,. \end{aligned} \tag{47}$$

Объектом изучения являются одноточечные функции основных экспоненциальных полей (смысл индекса $(m,n)$ у одноточечных функций, граничных состояний и амплитуд объясняется в [14] и [17, 18])

$$\langle V_a \rangle_{(1,1)} = \frac{\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | V_a \right\rangle}{\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | V_0 \right\rangle} = U^{(\mathrm{NS})}_{(1,1)}(a) \tag{48}$$

$$\langle R_a \rangle_{(1,1)} = \frac{\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | R_a \right\rangle}{\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | V_0 \right\rangle} = U^{(\mathrm{R})}_{(1,1)}(a) \ ,$$

где мы обозначили $\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} \right|$ граничное состояние, порожденное абсолютом в этой геометрии. Матричные элементы

$$\Psi^{(\mathrm{NS})}_{(1,1)} = \left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | V_a \right\rangle \tag{49}$$

$$\Psi^{(\mathrm{R})}_{(1,1)} = \left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | R_a \right\rangle$$

естественно интерпретировать как компоненты граничной волновой функции. В этой статье мы не будем повторять рассуждения из [17, 18] а приведем только конечный результат

$$U^{(\mathrm{N})}_{(1,1)}(a) = \frac{\left[\pi\mu\gamma\left(\frac{Qb}{2}\right)\right]^{-a/b} \Gamma\left(\frac{Qb}{2}\right)\Gamma\left(\frac{Q}{2b}\right)Q}{2(Q-2a)\Gamma\left(\frac{Qb}{2}-ab\right)\Gamma\left(\frac{Q}{2b}-\frac{a}{b}\right)} \tag{50}$$

$$U^{(\mathrm{R})}_{(1,1)}(a) = \frac{\left[\pi\mu\gamma\left(\frac{Qb}{2}\right)\right]^{-a/b} \Gamma\left(\frac{Qb}{2}\right)\Gamma\left(\frac{Q}{2b}\right)Q}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{Qb}{2}-ab\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{Q}{2b}-\frac{a}{b}\right)}$$

Подставляя уравнения (46) в одноточечные функции, мы получаем соотношения

$$\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | \bar{D}_{m,n} D_{m,n} V'_{m,n} \right\rangle = B_{m,n} \left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | \tilde{V}_{m,n} \right\rangle \tag{51}$$

$$\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | \bar{D}_{m,n} D_{m,n} R'_{m,n} \right\rangle = B_{m,n} \left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | \tilde{R}_{m,n} \right\rangle$$

Граничное состояние $\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} \right|$ суперконформно инвариантно. Это означает, в частности, что при всех $n \in Z$ и при всех $k \in Z, Z+1/2$ выполняются соотношения

$$\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} \right| \bar{G}_k = -i \left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} \right| G_{-k} \tag{52}$$

$$\left\langle \mathrm{B}_{(1,1))} \right| \bar{L}_n = \quad \left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} \right| L_{-n} \ .$$

Легко видеть, что из эти соотношений вытекают следующие (оператор $D^{\dagger}_{m,n}$ определен в разделе 5)

$$\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} \right| \bar{D}_{m,n} = \quad \left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} \right| D^{\dagger}_{m,n} \qquad mn \in 2Z \tag{53}$$

$$\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} \right| \bar{D}_{m,n} = -i \left\langle \mathrm{B}_{1,1} \right| D^{\dagger}_{m,n} \qquad mn \in 2Z+1$$

Во втором случае остается множитель $-i$, поскольку при $mn \in 2Z+1$, в отличие от всех остальных вариантов, оператор рождения особого вектора является фермионным (нечетным по $G$). Таким образом

$$\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | D^{\dagger}_{m,n} D_{m,n} V'_{m,n} \right\rangle = i^{mn-[mn/2]} B_{m,n} \left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | \tilde{V}_{m,n} \right\rangle$$

$$\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | D^{\dagger}_{m,n} D_{m,n} R'_{m,n} \right\rangle = \quad B_{m,n} \left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | \tilde{R}_{m,n} \right\rangle \ . \tag{54}$$

На языке рассматриваемых одноточечных функций формулу (39) можно интерпретировать следующим образом

$$\left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | D^{\dagger}_{m,n} D_{m,n} (V,R)'_{m,n} \right\rangle = r_{m,n} \left\langle \mathrm{B}_{(1,1)} | (V,R)_{m,n} \right\rangle \tag{55}$$

где числа $r_{m,n}$ даются формулами произведений (41),(42) и (43). Получим таким образом

$$B_{m,n} = (-i)^{mn-[mn/2]} \frac{r_{m,n} U^{(\mathrm{N,R})}_{(1,1)}(a_{m,n})}{U^{(\mathrm{N,R})}_{(1,1)}(a_{m,-n})} \tag{56}$$

Это равенство дает возможность легко найти коэффициенты $B_{m,n}$. Следует различать три случая

1. $m$ и $n$ оба четные

$$\begin{aligned} B_{m,n} = {} & [\pi\mu\gamma(bQ/2)]^n \, 2^{mn} b^{n-m+1} \\ & \times \gamma\left(\frac{m-nb^2}{2}\right) \prod\nolimits_{(k,l)\in\langle m,n\rangle_{\mathrm{NS}}} \lambda_{k,l} \end{aligned} \tag{57}$$

2. $m$ и $n$ оба нечетные

$$\begin{aligned} B_{m,n} = {} & i \, [\pi\mu\gamma(bQ/2)]^n \, 2^{mn} b^{n-m+1} \\ & \times \gamma\left(\frac{m-nb^2}{2}\right) \prod\nolimits_{(k,l)\in\langle m,n\rangle_{\mathrm{NS}}} \lambda_{k,l} \end{aligned} \tag{58}$$

3. $m$ нечетное, а $n$ четное (Рамоновский случай)

$$\begin{aligned} B_{m,n} = {} & [\pi\mu\gamma(bQ/2)]^n \, 2^{mn} b^{n-m} \\ & \times \gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{m-nb^2}{2}\right) \prod\nolimits_{(k,l)\in\langle m,n\rangle_{\mathrm{R}}} \lambda_{k,l} \end{aligned} \tag{59}$$

Величины $\lambda_{k,l}$ были определены в (28) а множества $\langle m,n\rangle_{\mathrm{NS}}$ и $\langle m,n\rangle_{\mathrm{R}}$ состоят из следующих пар целых чисел $(k,l)$

$$\begin{aligned} \langle m,n\rangle_{\mathrm{NS}} = {} & \{1-m:2:m-1, 1-n:2:n-1\} \\ & \cup \{2-m:2:m-2, 2-n:2:n-2\} \setminus \{0,0\} \end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned} \langle m,n\rangle_{\mathrm{R}} = {} & \{1-m:2:m-1, 2-n:2:n-2\} \\ & \cup \{2-m:2:m-2, 1-n:2:n-1\} \setminus \{0,0\} \end{aligned} \tag{61}$$

Взятие классического предела допустимо только в серии $(1,2k-1)$, $k=1,2,\ldots$ высших уравнений. Легко проверить, что выражение (58) в пределе $b\to 0$ превращается в $B_{1,2k-1} \to b^{-1}(2\pi\mu b^2)^{2k-1}[(k-1)!]^2$, в соответствии с результатами (12) классических вычислений.

**Благодарности.** Совместная работа авторов проводилась в рамках проекта INTAS по гранту INTAS-OPEN-03-51-3350 2004-2005. А.Б., кроме того, был поддержан грантами РФФИ 04-02-16027 2003-2005 и ВШ-2044-2003.2, а также программой РАН "Элементарные частицы и фундаментальная ядерная физика". Работа была завершена во время визита одного из авторов (Ал.З) в Институте Математических Исследований (RIMS) и Институте Теоретической Физики им. Юкавы (YITP) университета г.Киото в Японии. Ал.З выражает благодарность этим Институтам, а особенно проф. Т.Мива и Р.Сасаки, за поддержку и стимулирующие дискуссии. Поездка проходила в рамках проекта EGIDE.

## Список литературы


[1] Al.Zamolodchikov. Int. J. Mod. Phys. **A19[S2]** (2004) 510–523; hep-th/0312279.

[2] A.Belavin, A.Polyakov and A.Zamolodchikov. Nucl. Phys., **B241** (1984) 333–380.

[3] А.Белавин и Ал.Замолодчиков. ТМФ., **147** (2006) 339; in hep-th/0510214, pages 16-46.

[4] Ал.Замолодчиков. ТМФ **142** (2005) 183-196; hep-th/0505063.

[5] A.Polyakov. Phys.Lett., **B103** (1981) 211–213.

[6] J.Arvis. Nucl.Phys., **B212** (1983) 151; ibid **B218** (1983) 309.

[7] E.D'Hoker. Phys. Rev., **D28** (1983) 1346.

[8] O.Babelon. Phys.Lett., **141B** (1984) 353.

[9] J.Distler, Z.Hlousek and H.Kawai. Int. J. Mod. Phys., **A5** (1990) 391.

[10] R.Poghossian. Nucl.Phys., **B496** (1997) 451.

[11] R.Rashkov and M.Stanishkov. Phys.Lett., **B380** (1996) 49.

[12] L.Kadanoff and H.Ceva. Phys.Rev., **B3** (1971) 3918–3939.

[13] V.Kac. V.G.Kac. Infinite-dimensional Lie algebras. Prog. Math., Vol.44, Birkhäuser, Boston, 1984.

[14] A.Zamolodchikov and Al.Zamolodchikov. Liouville field theory on a pseudosphere. Preprint hep-th/0101182.

[15] V.Fateev, A.Zamolodchikov and Al. Zamolodchikov. Boundary Liouville Field Theory I. Boundary State and Boundary Two-point Function. Preprint hep-th/0001012.

[16] C.Imbimbo, S.Mahapatra and S.Mukhi. Nucl. Phys., **B375** (1992) 399.

[17] T.Fukuda and K.Hosomichi. Nucl. Phys. **B635** (2002) 215–254; hep-th/0202032.

[18] C.Ahn, C.Rim and M.Stanishkov. Nucl. Phys. **B636** (2002) 497-513; hep-th/0202043.